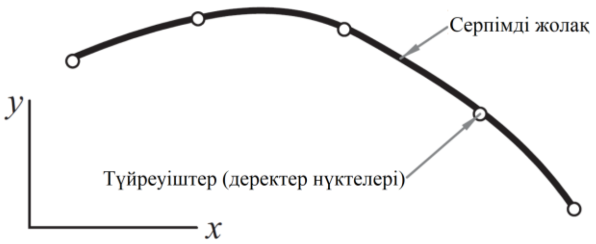
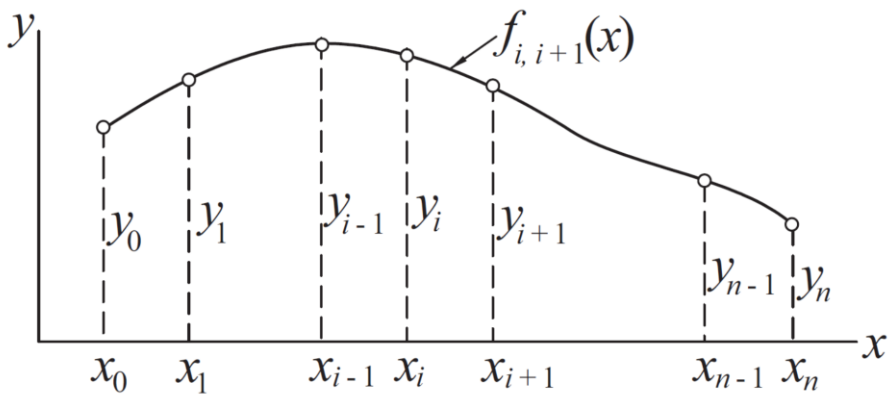
Кубтық сплайн көмегімен интерполяция

Егер деректердің бірнеше көбірек нүктелері бар болса, кубтық сплайнды жалпы интерполянт ретінде қолдану тиімді. Ол деректер нүктелері арасында тербеліске бейімділігі аз болғандықтан, полиномға қарағанда айтарлықтай жақсы.



1-сурет. Кубтық сплайнның механикалық моделі.

Кубтық сплайнның механикалық моделі 1-суретте көрсетілген. Бұл деректер нүктелеріне түйреуіштермен бекітілген жұқа серпімді арқалық. Арқалық түйреуіштер арасында жүктелмегендіктен, сплайн қисығының әрбір сегменті кубтық полином болып табылады — арқалық теориясынан $d^4y/dx^4 = q/(E \cdot I)$, $q = 0$ болғандықтан, $y(x)$ кубтық шама болатынын еске түсіріңіз, мұндағы Е – арқалық жасалған материал үшін Юнгтің серпімділік модулі, І – арқалықтың көлденең қимасының инерция моменті. Түйреуіштерде көлбеу және иілу моменті (демек, екінші туынды) үзіліссіз. Екі шеткі түйреуіштерде иілу моменті жоқ, демек, сплайнның екінші туындысы шеткі нүктелерде нөлге тең. Бұл шеттік жағдайлар сәулелік модельде табиғи түрде орын алатындықтан, алынған қисық кубтық сплайн ретінде белгілі. Түйреуіштер (яғни деректер нүктелері) сплайн түйіндері деп аталады.



2-сурет. Кубтық сплайн.

2-суретте $n + 1$ түйінді қамтитын кубтық сплайн көрсетілген. Біз i және $i + 1$ түйіндері арасындағы кесіндіні қамтитын кубтық көпмүше үшін $f_{i,i+1}(x)$ белгілеуін қолданамыз. Назар аударыңыз, сплайн бөлік кубтық қисықтан біріктірілген n кубтан $f_{0,1}(x), f_{1,2}(x), \dots, f_{n-1,n}(x)$ тұрады, олардың барлығының коэффициенттері әртүрлі.

i түйініндегі сплайнның екінші туындысын k_i арқылы белгілей отырып, екінші туындылардың үзіліссіздігі мынаны талап етеді:

$$f''_{i-1,i}(x_i) = f''_{i,i+1}(x_i) = k_i \tag{1}$$

Бұл кезеңде әрбір k белгісіз, тек шеткі жағдайда ғана

$$k_0 = k_n = 0$$

$f_{i,i+1}(x)$ коэффициенттерін есептеудің бастапқы нүктесі $f''_{i,i+1}(x)$ үшін өрнек болып табылады, оның сызықты екенін білеміз. Лагранждың екі нүктелі интерполяциясын қолдана отырып, келесіні жаза аламыз

$$f''_{i,i+1}(x) = k_i l_i(x) + k_{i+1} l_{i+1}(x)$$

мұндағы

$$l_i(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \qquad l_{i+1}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Осыдан,

$$f''_{i,i+1}(x) = \frac{k_i(x - x_{i+1}) - k_{i+1}(x - x_i)}{x_i - x_{i+1}} \tag{2}$$

x бойынша екі рет интегралдасақ, мынаны аламыз

$$f_{i,i+1}(x) = \frac{k_i(x - x_{i+1})^3 - k_{i+1}(x - x_i)^3}{6(x_i - x_{i+1})} + A(x - x_{i+1}) - B(x - x_i) \tag{3}$$

мұндағы A және B интегралдау тұрақтылары. Интегралдаудан туындайтын мүшелер әдетте $Cx + D$ түрінде жазылады. $C = A - B$ және $D = -Ax_{i+1} + Bx_i$ деп қарастыру арқылы біз (3) теңдеудің соңғы екі мүшесін аламыз және оларды келесі есептеулерде қолдануға ыңғайлы. $f_{i,i+1}(x_i) = y_i$ шартын қойып, (3) теңдеуден келесі теңдікті аламыз

$$\frac{k_i(x_i - x_{i+1})^3}{6(x_i - x_{i+1})} + A(x_i - x_{i+1}) = y_i$$

Осыдан,

$$A = \frac{y_i}{(x_i - x_{i+1})} - \frac{k_i}{6}(x_i - x_{i+1}) \tag{4}$$

Сол сияқты $f_{i,i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}$ теңдігінен

$$B = \frac{y_{i+1}}{(x_i - x_{i+1})} - \frac{k_{i+1}}{6}(x_i - x_{i+1}) \qquad (5)$$

аламыз. (4) пент (5)-ті (3)-ке қоя отырып, нәтижесінде

$$\begin{aligned} f_{i,i+1}(x) = \frac{k_i}{6}\left[\frac{(x - x_{i+1})^3}{x_i - x_{i+1}} - (x - x_{i+1})(x_i - x_{i+1})\right] \\ - \frac{k_{i+1}}{6}\left[\frac{(x - x_i)^3}{(x_i - x_{i+1})} - (x - x_i)(x_i - x_{i+1})\right] \qquad (6) \\ + \frac{y_i(x - x_{i+1}) - y_{i+1}(x - x_i)}{(x_i - x_{i+1})} \end{aligned}$$

шығады.

Ішкі түйіндердегі сплайнның k_i екінші туындылары көлбеудің $f'_{i-1,i}(x_i) = f'_{i,i+1}(x_i)$ үзіліссіздік шарттарынан алынған, мұндағы $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Кішкентай түрлендіруден кейін мына теңдеулер пайда болады.

$$\begin{aligned} k_{i-1}(x_{i-1} - x_i) + 2k_i(x_{i-1} - x_{i+1}) + k_{i+1}(x_i - x_{i+1}) \\ = 6\left(\frac{y_{i-1} - y_i}{x_{i-1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (7) \end{aligned}$$

(7) теңдеулер үшдиагональды коэффициентті матрица, оларды алдыңғы сабақтарда сипатталған LU жіктеу әдісі арқылы үнемді шешуге болады.

Егер деректер нүктелері h аралықта біркелкі орналасса, онда $x_{i-1} - x_i = x_i - x_{i+1} = -h$ және (7) теңдеулерді мына түрде ықшамдаймыз

$$k_{i-1} + 4k_i + k_{i+1} = \frac{6}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (8)$$

МЫСАЛ 1

$x = 1{,}5$ кезінде **y**-ті анықтау үшін кубтық сплайнды пайдаланыңыз. Деректер нүктелері

x	1	2	3	4	5
y	0	1	0	1	0

Шешуі. Бес түйін $h = 1$ нүктесінде бірдей қашықтықта орналасқан. Сплайнның екінші туындысы бірінші және соңғы түйінде нөлге тең болатынын еске түсірсек, бізде $k_0 = k_4 = 0$ болады. Басқа түйіндердегі екінші туындылар теңдеуден алынады. i = 1, 2, 3 мәнін пайдаланғанда мына теңдеулер шығады.

$$0 + 4k_1 + k_2 = 6(0 - 2 \cdot 1 + 0) = -12$$
$$k_1 + 4k_2 + k_3 = 6(1 - 2 \cdot 0 + 1) = 12$$

$$k_2 + 43 + 0 = 6(0 - 2 \cdot 1 + 0) = -12$$

Шешімі $k_1 = k_3 = -30/7, \;\; k_2 = 36/7.$

x=1.5 нүктесі 0 және 1 түйіндерінің арасындағы кесіндіде жатыр. Сәйкес интерполянт (6) теңдеуден $i = 0$ орнату арқылы алынады. $x_i - x_{i+1} = -h = -1$ болғанда, (6) теңдеуден келесіні аламыз.

$$f_{0,1}(x) = -\frac{k_0}{6}[(x - x_1)^3 - (x - x_1)] + \frac{k_1}{6}[(x - x_0)^3 - (x - x_0)] \\ - [y_0(x - x_1) - y_1(x - x_0)]$$

Осыдан

$$y(1.5) = f_{0,1}(1.5) = 0 + \frac{1}{6}\left(-\frac{30}{7}\right)[(1.5 - 1)^3 - (1.5 - 1)] - [0 - 1(1.5 - 1)] = 0.7679$$

Бұл жағдайда төрт кубтық сегменттен тұратын интерполянттың графигі суретте көрсетілген.